ЛЕКЦІЯ № 12

Принцип Мопертюї.

У попередніх лекціях ми розглянули підхід до механіки в рамках варіаційного принципу в лагранжевій механіці та в рамках принципів найменшої дії у гамільтоновій механіці. Основним об'єктом у цьому підході є так звана *дія.*

У лагранжовому підході дія має вигляд

$$S = \int L\left(q, \dot{q}\right) dt\,, \tag{12.1}$$

та визначає лагранжіан системи $L\left(q, \dot{q}\right)$ (див. лекцію №3).

У гамільтоновому підході дія може бути представлена у вигляді (див. лекцію № 9 та формулу (21.9))

$$S = \int p dq - \int H\left(p, q\right) dt\,. \tag{12.2}$$

Для руху матеріальної точки зв'язок цих визначень очевидний: обидва вони мають вигляд

$$S = \int \left(2T - E\right) dt\,. \tag{12.3}$$

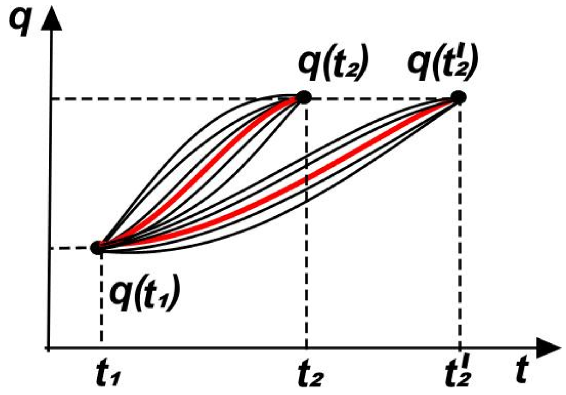
Обидва підходи (лагранжів і гамільтонів) еквівалентні, і дають повне рішення про динаміку системи, описуючи як траєкторії руху частинок , так і зміну швидкостей частинок вздовж цих траєкторій руху.

З іншого боку, як вказано у лекції №3, вперше принцип мінімальності дії, як і саме поняття *дії,* було введено Мопертюї. Однак, під дією він розумів величину

$$S_0 = \int 2T dt\,, \tag{12.4}$$

яка пізніше отримала назву *укороченої дії* . Що означає принцип мінімальності укороченої дії і до чого він призводить?

Раніше, в лекції №9 ми розглядали дію як функцію часу, для якої при фіксованих початкових координатах і часу фіксувалося також кінцева координата при довільному часі (див. Рис.26.1).



26.1. Варіювання кінцевого часу траєкторії частинки.

Загалом у разі такої варіації вздовж траєкторії енергія не зберігається. Розглянемо консервативну систему, у якій гамільтоніан не залежить від часу і енергія зберігається при варіації траєкторій із фіксованою кінцевою координатою. Але в цю кінцеву точку система потрапляє за різний час (див. Рис.26.2).

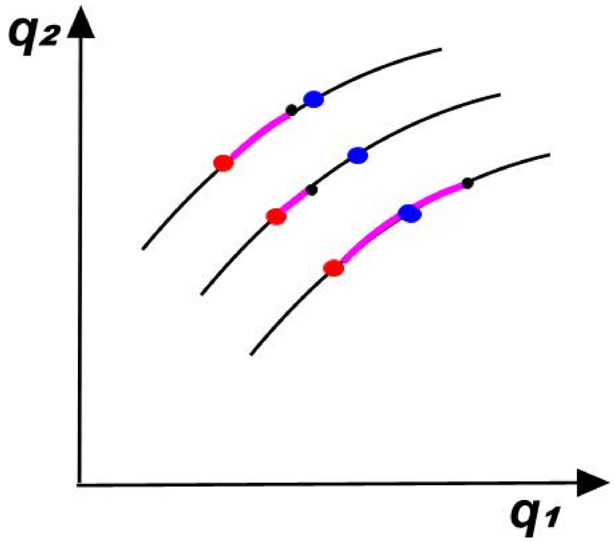


Рис.26.2. Варіації траєкторій руху у принципі Мопертюї .

На Рис.26.2 зображені справжні траєкторії руху частинки у системі з двома ступенями вільності. Під час руху вздовж траєкторії енергія зберігається. Оскільки кінцева точка траєкторії фіксована, а змінюються часи попадання в неї, то втрачається інформація про переміщення вздовж траєкторії, але залишається опис траєкторії. Тобто принцип Мопертюї дозволяє знаходити траєкторії без деталізації швидкостей руху вздовж траєкторії.

При варіюванні лише кінцевого часу руху варіаційний принцип зводиться до співвідношення (див. лекція №9):

$$\delta S = -H\delta t\,. \tag{12.5}$$

Але, оскільки енергія зберігається, це співвідношення зводиться до такого:

$$\delta S = -E\delta t\,. \tag{12.6}$$

З іншого боку , з співвідношення (12.2) витікає, що

$$S = \int pdq - \int Edt = \int pdq - Et\,. \tag{12.7}$$

Варіація цієї формули призводить до виразу

$$\delta S = \delta \int pdq - E\delta t\,. \tag{12.8}$$

Порівняння формул (12.6) та (12.8) призводить до результату:

$$\delta \int pdq = \delta S_0 = 0\,, \tag{12.9}$$

де величина $S_0 = \int pdq$ називається *укороченою дією.*

Таким чином, укорочена дія мінімальна при збереженні енергії руху і фіксації координати в кінцевий момент часу , який може бути довільним.

Як користуватися цим принципом? Оскільки інтегрування в укороченій дії проводиться за координатами, то у формулі імпульси також мають бути виражені через координати. Покажемо це на прикладі системи з двома ступенями вільності. Для неї

$$S_0 = \int \left(p_1 dq_1 + p_2 dq_2 \right). \tag{12.10}$$

У простому випадку матеріальної точки це зводиться до

$$S_0 = \int m\left(\frac{dq_1}{dt} dq_1 + \frac{dq_2}{dt} dq_2 \right) = \int m \frac{\left(dq_1\right)^2 + \left(dq_2\right)^2}{dt}\,. \tag{12.11}$$

Щоб отримати вираз, що залежить тільки від q_i і dq_i і позбутися диференціалів dt, необхідно скористатися виразом для енергії, що зберігається:

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dq_1}{dt}\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt}\frac{dq_2}{dt} \right) + U\left(q_i\right). \tag{12.12}$$

Звідси витікає що

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2(E-U)}}\sqrt{(dq_1)^2+(dq_2)^2}\,, \tag{12.13}$$

і після підстановки цього виразу для dt в (12.11), отримуємо:

$$S_0 = \int \sqrt{2m\left(E-U(q_i)\right)}\,\sqrt{(dq_1)^2+(dq_2)^2}\,. \tag{12.14}$$

Вираз у кінці цієї формули відповідає елементу довжини траєкторії, збільшенню координати вздовж траєкторії (див. Рис.26.3).

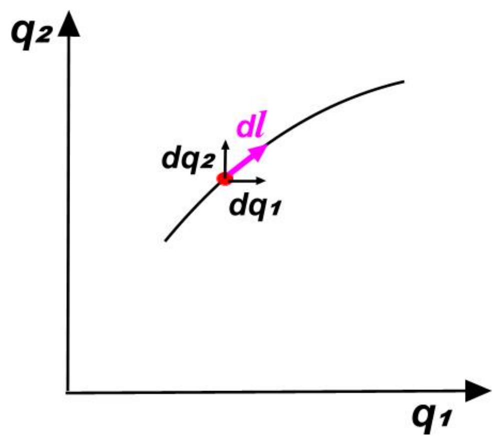


Рис.26.3. Просторова координата вздовж траєкторії.

Таким чином, вираз для укороченої дії набуває вигляду

$$S_0 = \int \sqrt{2m\left(E-U(q_i)\right)}\,dl\,, \tag{12.15}$$

і варіаційний принцип Мопертюї записується так:

$$\delta\int \sqrt{2m\left(E-U(q_i)\right)}\,dl = 0\,. \tag{12.16}$$

Щоб зрозуміти, як «працює» принцип Мопертью , отримаємо рівняння для траєкторії руху частки у потенціалі $U = U(\vec{r})$.

$$\delta\int \sqrt{\left(E-U(\vec{r})\right)}\,dl = -\int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{E-U}}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\delta\vec{r} + \int \sqrt{E-U}\,\delta d\,l\,. \tag{12.17}$$

Оскільки $(dl)^2 = (d\vec{r})^2$, то $dl\delta dl = d\vec{r}\delta d\vec{r}$ й $\delta dl = (d\vec{r}/dl)\delta d\vec{r} = (d\vec{r}/dl)d\delta\vec{r}$. Підставимо вираз для δdl у другий доданок (12.17) і проінтегруємо його частинами. Врахуємо, що варіація $\delta\vec{r}$ на межах інтегрування дорівнює нулю.

(Фіксація кінцевої координати у принципі Мопертюї). В результаті отримаємо

$$-\int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{E-U}}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\delta\vec{r} - \int \frac{\partial}{\partial l}\left(\sqrt{E-U}\,\frac{d\vec{r}}{dl}\right)\delta\vec{r} = 0\,. \qquad (12.18)$$

Через довільність варіації $\delta\vec{r}$ маємо

$$2\sqrt{E-U}\,\frac{d}{dl}\left(\sqrt{E-U}\,\frac{d\vec{r}}{dl}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\,. \qquad (12.19)$$

Для порівняння наведемо рівняння Ньютона для цього випадку:

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\,. \qquad (12.20)$$

З (12.19) і (12.20) видно зв'язок часу та координати вздовж траєкторії:

$$\frac{d}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U\right)}\,\frac{d}{dl}\,. \qquad (12.21)$$

Згадаймо, що для одновимірного руху має місце співвідношення

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U\left(x\right)\right)}\,. \qquad (12.22)$$

З порівняння видно, що у підході Мопертюи замість часу руху траєкторією фігурує координата вздовж цієї траєкторії, яка грає роль ефективного часу, в якому частка рухається вздовж траєкторії з постійною швидкістю.